ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRƯƠNG THỊ HUỆ

BAO LỒI VÀ MỘT VÀI ỨNG DỤNG TRONG TỐI ƯU TOÀN CỤC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRƯƠNG THỊ HUỆ

BAO LỒI VÀ MỘT VÀI ỨNG DỤNG TRONG TỐI ƯU TOÀN CỤC

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS. TSKH. LÊ DŨNG MƯU

Thái Nguyên - 2017

Mục lục

Lời cảm ơn

Trước tiên tôi xin được gửi lời cảm ơn đến tất cả quý Thầy Cô đã giảng dạy trong chương trình Cao học Toán ứng dụng khóa 9 - Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, những người đã truyền đạt kiến thức hữu ích về ngành Toán ứng dụng làm cơ sở cho tôi hoàn thành luận văn này.

Đặc biệt tôi xin chân thành cảm ơn Thầy giáo GS.TSKH. Lê Dũng Mưu. Thầy đã dành nhiều thời gian quý báu tận tình hướng dẫn tôi trong suốt quá trình thực hiện luận văn, đồng thời còn là người giúp tôi lĩnh hội được kiến thức chuyên môn và rèn luyện cho tôi tác phong nghiên cứu khoa học.

Qua đây, tôi cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình, bạn bè thân thiết là những người luôn sát cánh bên tôi, tạo mọi điều kiện tốt nhất cho tôi, đã nhiệt tình giúp đỡ, chia sẻ, động viên tôi trong suốt quá trình học tập, cũng như khi tôi thực hiện và hoàn thành luận văn này.

Mặc dù đã rất cố gắng song luận văn không tránh khỏi có những thiếu sót. Rất mong nhận được ý kiến đóng góp của các Thầy giáo, Cô giáo và các anh chị học viên để luận văn hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 05 năm 2017

Tác giả luận văn

Trương Thị Huệ

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	trường số thực
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n-chiều
$A \times B$	tích Đề các của hai tập A và B
$A \cup B$	hợp của hai tập A và B
$A \cap B$	giao của hai tập A và B
$A \subset B$	A là tập con của B (mọi phần tử của A là phần tử của B)
$A \subseteq B$	A là tập con (có thể bằng) của B
$\partial f(x)$	dưới vi phân của hàm lồi f tại x
$L(x, \mu, \nu)$	hàm Lagrange
$\langle ., . \rangle$	tích vô hướng trong $\mathbb{R}^n$
∇f	Gradient của hàm f
$\varnothing$	tập rỗng
CoE	bao lồi đóng của E
$ConeE$	bao nón lồi đóng của E
riC	tập hợp các điểm trong tương đối của C
KKT	Karush - Kuhn - Tucker
$dimM$	số chiều của không gian M

Mở đầu

Toán học là công cụ hỗ trợ đắc lực để chúng ta khám phá thế giới tự nhiên xung quanh ta và giải quyết các vấn đề thực tiễn. Giải tích lồi là một bộ môn quan trọng của Giải tích toán học. Đối tượng nghiên cứu của Giải tích lồi là tập lồi và hàm lồi. Tập lồi, hàm lồi xuất hiện trong nhiều vấn đề của toán học, cũng như trong cuộc sống thực tế. Trong giải tích lồi khái niệm bao lồi là 1 khái niệm cơ bản thông qua đó người ta nghiên cứu tập không lồi. Bao lồi có phạm vi ứng dụng rất rộng rãi đặc biệt trong tối ưu toàn cục.

Tối ưu toàn cục là 1 lớp bài toán của tối ưu hóa. Hiện nay các bài toán tối ưu toàn cục đang được nhiều người quan tâm nghiên cứu vì có nhiều ứng dụng trong thực tế khoa học, kĩ thuật, kinh tế... Vì vậy mục đích của đề tài là:

- Tìm hiểu và tổng kết lại các kiến thức cơ bản nhất về bao lồi (của cả tập và hàm lồi)

- Xét đến ứng dụng của bao lồi vào 1 số bài toán tối ưu toàn cục.

Luận văn trình bày một cách có hệ thống về các kiến thức cơ bản nhất của giải tích lồi như hàm lồi, bao lồi và bài toán tối ưu toàn cục.

Bố cục luận văn gồm phần mở đầu, hai chương trình bày nội dung của luận văn, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: "Bao lồi của tập lồi và hàm lồi". Chương này trình bày một số kiến thức của giải tích lồi như tập lồi, hàm lồi, bao lồi của tập lồi là những kiến thức nền tảng, cần thiết phục vụ cho việc giải quyết 1 số bài toán tối ưu toàn cục.

Chương 2: "Bài toán tối ưu". Chương này trình bày một cách tổng quan về bài toán tối ưu, bài toán tối ưu lồi, bài toán định vị, bài toán cực tiểu hàm lõm trên tập lồi đa diện....

Chương 1

Bao lồi và hàm lồi

Chương này trình bày một số kiến thức của Giải tích lồi như: Tập lồi, Hàm lồi, Cực trị của hàm lồi, Bao lồi và hàm lồi. Đây là những kiến thức nền tảng, cần thiết phục vụ cho việc nghiên cứu áp dụng vào bài toán định vị và cực đại hàm lồi.

1.1 Tập lồi, hàm lồi

Định nghĩa 1.1.1 Một tập $C \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là một *tập lồi*, nếu C chứa mọi đoạn thẳng đi qua hai điểm bất kỳ của nó. Tức là C lồi khi và chỉ khi

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

Ta nói x là *tổ hợp lồi* của các điểm (véc-tơ) $x^1, ..., x^k$ nếu

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j, \lambda_j \geq 0 \ \ \forall j = 1, ..., k, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

Tương tự, x là *tổ hợp a-phin* của các điểm (véc-tơ) $x^1, ..., x^k$ nếu

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$$

Tập hợp của các tổ hợp a-phin của $x^1, ..., x^k$ được gọi là *bao a-phin* của các điểm này

Định lý 1.1.2 *Tập hợp C là lồi khi và chỉ khi nó chứa mọi tổ hợp lồi của* *các điểm của nó. Tức là: C lồi khi và chỉ khi*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \lambda_1, ..., \lambda_k > 0 : \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \forall x^1, ..., x^k \in C \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \in C.$$

Chứng minh. Điều kiện đủ là hiển nhiên từ định nghĩa. Ta chứng minh điều kiện cần bằng quy nạp theo số điểm. Với $k = 2$, điều cần chứng minh suy ra ngay từ định nghĩa của tập lồi và tổ hợp lồi. Giả sử mệnh đề đúng với $k - 1$ điểm. Ta cần chứng minh với k điểm.

Giả sử x là tổ hợp lồi của k điểm $x^1, ..., x^k \in C$. Tức là

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j, \lambda_j > 0 \ \ \forall j = 1, ..., k, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

Đặt

$$\xi = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j.$$

Khi đó $0 < \xi < 1$ và

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j x^j + \lambda_k x^k \\ &= \xi \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\xi} x^j + \lambda_k x^k. \qquad (1.1) \end{aligned}$$

Do

$$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\xi} = 1$$

và $\dfrac{\lambda_j}{\xi} > 0$ với mọi $j = 1, ..., k - 1$, nên theo giả thiết quy nạp, điểm

$$y := \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\xi} x^j \in C.$$

Ta có

$$x = \xi y + \lambda_k x^k$$

Do $\xi > 0, \lambda_k > 0$ và

$$\xi + \lambda_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1,$$

nên x là một tổ hợp lồi của hai điểm y và x^k đều thuộc C. Vậy $x \in C$. $\square$

Lớp các tập lồi là đóng với các phép giao, phép cộng đại số và phép nhân tích Descartes.

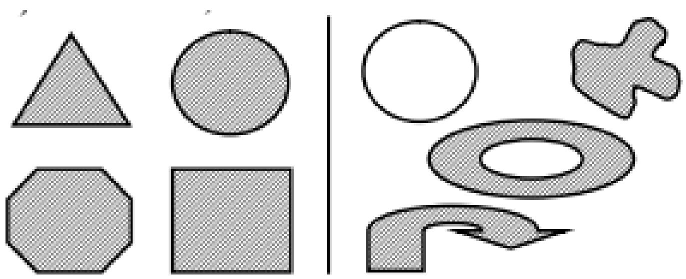
Định lý 1.1.3 *Nếu A, B là các tập lồi trong $\mathbb{R}^n, C$ là lồi trong $\mathbb{R}^m$, thì các tập sau là lồi :*

$$A \cap B := \{x |\, x \in A, x \in B\},$$

$$\lambda A + \beta B := \{x |\, x = \alpha a + \beta b, a \in A, b \in B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

$$A \times C := \{x \in \mathbb{R}^{n+m} |\, x = (a, c) : a \in A, c \in C\}.$$

Chứng minh.*Dễ dàng được suy ra trực tiếp từ định nghĩa: $x \in C$.* $\square$



Hình 1.1: Một số tập lồi và tập không lồi trong $\mathbb{R}^2$

Định nghĩa 1.1.4 Siêu phẳng trong không gian $\mathbb{R}^n$ là một tập hợp các điểm có dạng

$$\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = \alpha\},$$

trong đó $a \in \mathbb{R}^n$ là một véc - tơ khác 0 và $\alpha \in \mathbb{R}$. Véc - tơ a thường được gọi là véc - tơ pháp tuyến của siêu phẳng. Một siêu phẳng sẽ chia không gian ra hai nửa không gian.

Nửa không gian được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.1.5 Một tập C được gọi là *tập a-phin* nếu nó chứa đường thẳng đi qua hai điểm bất kỳ của nó, tức là

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

Vậy tập *a-phin* là một trường hợp riêng của tập lồi. Một ví dụ điển hình của tập *a-phin* là các không gian con.

Định nghĩa 1.1.6 Một tập lồi mà là giao của một số hữu hạn nửa không gian đóng gọi là một tập lồi đa diện. Nói cách khác, đó là tập nghiệm của một hệ hữu hạn các bất phương trình tuyến tính:

$$\langle a^i, x\rangle \leq b_i, i = 1, ..., m\, (a^i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}),$$

nghĩa là tập các x nghiệm đúng $Ax \leq b$ với A là một ma trận cấp $m \times n$ và $b \in \mathbb{R}^m$.

Hình 1.2: Tập lồi đa diện

Định nghĩa 1.1.7 Một tập C được gọi là *nón* nếu

$$\forall \lambda > 0, \forall x \in C \Rightarrow \lambda x \in C.$$

Theo định nghĩa, ta thấy rằng gốc tọa độ có thể thuộc nón hoặc không thuộc nón. Dĩ nhiên một nón không nhất thiết là một tập lồi. Ví dụ

$$C := \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$$

là một nón, nhưng không lồi. Một nón được gọi là *nón lồi* nếu nó đồng thời là một tập lồi. Một nón lồi được gọi là nón nhọn nếu nó không chứa đường thẳng. Khi đó ta nói 0 là đỉnh của nón. Nếu nón lồi này lại là một tập lồi đa diện thì ta nói nó là nón lồi đa diện. Một ví dụ điển hình của nón lồi đa diện, thường được sử dụng, là tập hợp nghiệm của hệ bất phương trình tuyến tính